Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 05.11.2013.

Pismeni ispit iz Diferencijalne geometrije

Bitna napomena: Obavezno napisati formulu koju koristite i značenja simbola iz napisane formule, u sva četri zadatka. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Napisati jednačinu krive $\overrightarrow{r} = (a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\overrightarrow{r}$ kao funkciju argumenta s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente, glavn normale i binormale krive u proizvoljnoj tački. Izračunati krivinu i torziju krive u proizvoljnoj tački.

2. Data je kriva $\overrightarrow{r} = a\cos t\,\overrightarrow{i} + a\sin t\,\overrightarrow{j} + az(t)\overrightarrow{k}$. Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan $x0y$ u tačkama kružnice $x^2 + y^2 = R^2$.

3. Površ Γ data je jednačinama

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v.$$

Pokazati da je u svakoj tački krive $v = 0$ na toj površi oskulatorna ravan te krive istovremeno i tangentna ravan površi Γ.

4. Odrediti asimptotske linije površi Γ

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v.$$

(#) Napisati jednačinu krive $\vec{r}=(a\cos t, a\sin t, bt)$ izrazivši $\vec{r}$ kao funkciju argumenta s. Diferenciranjem po luku s naći jedinične vektore tangente, glavne normale i binormale krive u proizvoljnoj tački. Izračunati krivinu i torziju krive u proizvoljnoj tački.

Rj.

Znamo da je

$$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2=a^2+b^2 \Rightarrow ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt$$

$$ds=\sqrt{a^2+b^2}\,dt \Rightarrow s=\sqrt{a^2+b^2}\,t \Rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\vec{r}=\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Vektor tangente sad računamo po formuli $\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\left(-a\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\right).$$

Primjetimo da smo u stvari dobili jedinični vektor tangente.

Iz $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$

dobija se jedinični vektor glavne normale

$$\vec{n}=\frac{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}=\left(-\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right)$$

Jedinični vektor binormale

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin\frac{s}{a^2+b^2} & a\cos\frac{s}{a^2+b^2} & b \\ -\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} & -\sin\frac{s}{a^2+b^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, -b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\right)$$

Kako je krivina $K = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$ to je $K = \frac{a}{a^2+b^2}$

Kako je $\frac{d\vec{b}_0}{ds} = \frac{\vec{n}_0}{T}$ (gdje je $\frac{1}{T} = -\tau$ torzija)

to se torzija krive može odrediti iz

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}$$ (u našem slučaju $\vec{b}$ i $\vec{n}$ su jedinični vektori)

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}\left(b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right) = -\frac{b}{a^2+b^2}\vec{n}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

tražena torzija krive

(#) Data je kriva $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + a\,z(t)\,\vec{k}$. Odrediti $z(t)$ tako da kriva prolazi tačkama $(a, 0, a)$ i da njene tangente prodiru ravan xOy u tačkama kružnice $x^2+y^2=R^2$.

Rj. $\vec{r} = (a\cos t, a\sin t, a\,z(t)) \Rightarrow$ za $t=0$ imamo $A(a, 0, a\,z(0))$.

Tačka $A(a,0,a)$ leži na krivoj, pa iz $a\,z(0) = a$ slijedi $z(0)=1$.

Primjetimo da je jednačina tangente

$$\frac{x-a\cos t}{-\sin t} = \frac{y-a\sin t}{\cos t} = \frac{z-a\,z(t)}{z'} \quad (=k)$$

Odredimo prodor tangente kroz ravan xOy

$$x-a\cos t = -k\sin t$$
$$y-a\sin t = k\cos t$$
$$z-a\,z(t) = k\,z'$$

$$x = -k\sin t + a\cos t$$
$$y = k\cos t + a\sin t$$
$$z = k\,z' + a\,z(t)$$

Za $k = -a\dfrac{z}{z'}$ ćemo dobiti da je $z=0$. Prema tome prodor tangente kroz ravan xOy ima koordinate

$$Z=0$$
$$X = a\frac{z}{z'}\sin t + a\cos t$$
$$Y = -a\frac{z}{z'}\cos t + a\sin t$$

Iz uslova $R^2 = X^2 + Y^2 = a^2\dfrac{z^2}{z'^2} + a^2$

dobija se $\dfrac{z^2}{z'^2} = \dfrac{R^2-a^2}{a^2}$ tj. $\dfrac{z'}{z} = \pm\sqrt{\dfrac{a^2}{R^2-a^2}}$, dakle

$$\ln|z| = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t + \ln|C|$$

Znači

$$z = Ce^{ut}, \quad \text{gdje je } u = \pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}.$$

No imali smo $z=a$ za $t=0$ (vidi točku $(a;0;a)$)

pa je $a=C$ tj.

$$z = a e^{\pm\sqrt{\frac{a^2}{R^2-a^2}}\,t} = a e^{ut},$$

traženo rješenje

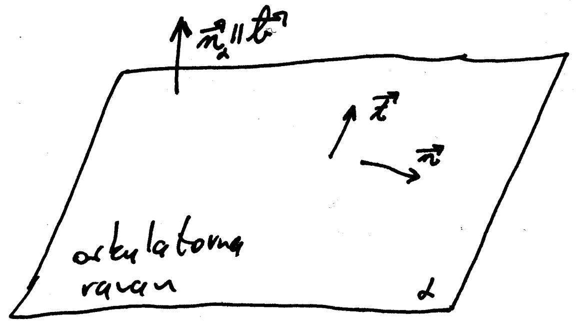
Površ Γ data je jednačinama

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v.$$

Pokazati da je u svakoj tački krive $v=0$ na toj površi oskulatorna ravan te krive istovremeno i tangentna ravan površi Γ.

Rj. Kriva $v=0$ površi Γ ima jednačinu

$$\vec{r} = (u^2, u^3, u^4)$$



$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}$$

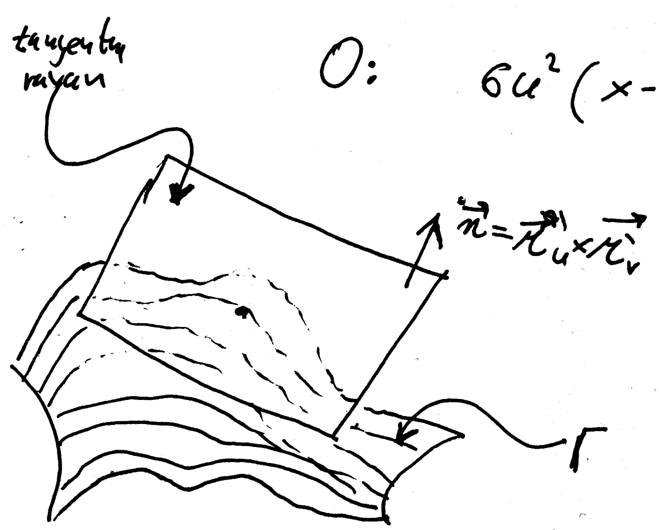
Oskulatorna ravan krive određena je vektorom $\vec{b} = \lambda(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}})$

Kako je $\dot{\vec{r}} = (2u, 3u^2, 4u^3)$, $\ddot{\vec{r}} = (2, 6u, 12u^2)$

$$\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 3u^2 & 4u^3 \\ 2 & 6u & 12u^2 \end{vmatrix} = (12u^4, -16u^3, 6u^2) = 2u^2(6u^2, -8u, 3)$$

to je jednačina oskulatorne ravni

$$O: \quad 6u^2(x-u^2) - 8u(y-u^3) + 3(z-u^4) = 0.$$



Tangentna ravan površi određena je vektorom $\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'$.

Kako je

$$\vec{r}\,'_u = \left(2u,\ 3u^2+v,\ 4u^3+\frac{4}{3}uv\right)$$

$$\vec{r}\,'_v = \left(1,\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right)$$

$$\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & 3u^2+v & 4u^3+\frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \end{vmatrix} = \left(-2u^4-\frac{2}{3}u^2v,\ \frac{8}{3}u^3+\frac{4}{3}uv,\ -u^2-v\right)$$

Za $v=0$ je

$$\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v = \left(-2u^4,\ \frac{8}{3}u^3,\ -u^2\right) = -\frac{1}{3}u^2\left(6u^2,\ -8u,\ 3\right)$$

i jednačina tangentne ravni duž krive $v=0$ glasi

$$6u^2(x-u^2) - 8u(y-u^3) + 3(z-u^4) = 0.$$

Odrediti asimptotske linije površi Γ

$$x = u^2 + v, \quad y = u^3 + uv, \quad z = u^4 + \frac{2}{3}u^2 v.$$

Rj. Diferencijalna jednačina asimptotske linije površi je

$$F_2 = 0 \quad \text{ili} \quad d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0 \quad \text{ili} \quad L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

$$\vec{r}\,'_u = \left(2u,\ 3u^2+v,\ 4u^3+\frac{4}{3}uv\right), \qquad \vec{r}\,''_{uu} = \left(2,\ 6u,\ 12u^2+\frac{4}{3}v\right)$$

$$\vec{r}\,'_v = \left(1,\ u,\ \frac{2}{3}u^2\right) \qquad \vec{r}\,''_{uv} = \left(0,\ 1,\ \frac{4}{3}u\right)$$

$$\vec{r}\,''_{vv} = (0,0,0)$$

Gaussove fundamentalne veličine drugog reda možemo izračunati po formulama

$$L = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{vmatrix}, \qquad M = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} \end{vmatrix},$$

$$N = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix} \qquad \text{gdje je} \quad W = \sqrt{EG - F^2}.$$

$4u^3 - \frac{4}{3}u^3$ $\quad \frac{36}{3}$

$12u^2 - \frac{4}{3}u^2$

U našem slučaju

$$L = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 2u & 3u^2+v & 4u^3+\frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \\ 2 & 6u & 12u^2+\frac{4}{3}v \end{vmatrix} \xrightarrow[III_v - II_v\cdot 2]{I_v - II_v\cdot(2u)} \frac{1}{W}\begin{vmatrix} 0 & u^2+v & \frac{8}{3}u^3+\frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \\ 0 & 4u & \frac{32}{3}u^2+\frac{4}{3}v \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-1}{W} \begin{vmatrix} u^2+v & \frac{8}{3}u^3 + \frac{4}{3}uv \\ 4u & \frac{32}{3}u^2 + \frac{4}{3}v \end{vmatrix} = \dots = \frac{-1}{W} \cdot \frac{4}{3}(5u^2v + v^2)$$

$$M = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 2u & 3u^2+v & 4u^3+\frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3}u \end{vmatrix} = \dots = \frac{1}{W} \cdot \frac{4}{3}u^3$$

$$N = \frac{1}{W} \begin{vmatrix} 2u & 3u^2+v & 4u^3+\frac{4}{3}uv \\ 1 & u & \frac{2}{3}u^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Jednačina $L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$, sada postaje

$$(5u^2v + v^2)\,du^2 - 2u^3\,du\,dv = 0$$

$$\Big((5u^2v+v^2)\,du - 2u^3\,dv\Big)\,du = 0$$

Odakle je

$$du = 0 \qquad \text{ili} \qquad 2u^3\frac{dv}{du} - 5u^2v = v^2$$

ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina $\left(v' - \frac{5}{2}\cdot\frac{v}{u} = \frac{v^2}{2u^3}\right)$.

Integracijom prve nalazimo $u = C$, a integracijom druge (Bernulijeve) jednačine $v = \dfrac{u^{5/2}}{C-\sqrt{u}}$ i jednačine asimptotskih linija glase

$$\vec{r}_1 : \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u,v) \\ u = C \end{cases} ; \qquad \vec{r}_2 : \begin{cases} \vec{r} = \vec{r}(u,v) \\ v = \dfrac{u^{5/2}}{C-\sqrt{u}} \end{cases}$$